Redactare: Alina Scurtu
Tehnoredactare computerizată: Emil Stoica, Cristina Aprodu

Date despre autor

Emil Stoica este autorul lucrărilor: *Calculatoare electronice și sisteme de operare*, curs, 2 vol. (coautor, Facultatea de Cibernetică, 1972); *Baze logice pentru calculatoare numerice* (Editura Tehnică, București, 1978); *Tomografia computerizată* (revista „Știință și tehnică", 1989); *Algebra. Sinteze ale elementelor teoretice de bază* (Editura Odeon, București, 1996); *Algebra. Ghid practic* (Editura Eikon, Cluj-Napoca, 2007); *Trigonometria* (Editura Corint, București, 2009).

ISBN 978-973-135-502-3

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
STOICA, EMIL
Algebra: elementele de bază în rezolvarea de exerciții și probleme: culegere de exerciții și probleme aplicative: pentru gimnaziu și liceu / Emil Stoica. - București: Corint, 2009
Bibliogr.
ISBN 978-973-135-502-3

512

Emil Stoica

ALGEBRA

Elementele de bază în rezolvarea de exerciții și probleme

Culegere de exerciții și probleme aplicative

PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU

CORINT

În PARTEA I, lucrarea de față își propune să ofere — într-o formă compactă, dar nu sumară, și evitând intenționat o prezentare sofisticată — sinteza elementelor teoretice de bază ale instrumentarului practic din ALGEBRA învățământului mediu; la provocarea „CE" a culegerilor de exerciții și probleme se intenționează a se da răspunsul „CU CE" și „CUM".

Scopul principal urmărit este punerea la dispoziția elevilor (și nu numai) a unui material ușor accesibil și unitar, sintetic, însă suficient de detaliat încât să poată constitui un material de însușire, de aprofundare sau de recapitulare — cu aplicare practică directă și prin studiu individual — a informațiilor furnizate în mai mulți ani de școlarizare.

Fără stăpânirea acestor informații (evident greșit catalogate uneori ca „teorie sterilă"), tentativa rezolvării practice de exerciții și probleme este un demers aproape inutil sau, cel mult, mecanic.

Prezentarea noțiunilor teoretice este însoțită de exemple și sugestii de aplicare, dându-se soluții sau metode de rezolvare a celor mai frecvent întâlnite cazuri în practica rezolvării de exerciții și probleme; din acest punct de vedere, lucrarea constituie un GHID PRACTIC aplicativ, care poate fi consultat și utilizat eficient chiar în timpul rezolvării unui exercițiu sau a unei probleme concrete.

În PARTEA a II-a sunt prezentate exerciții și probleme aplicative, cu indicații de rezolvare și răspunsuri corelate cu, și cu trimitere la PARTEA I, precum și exerciții și probleme aplicative fără indicații și răspunsuri.

Modul de prezentare vizează un nivel mediu de pregătire prealabilă, urmărind eficiența percepției, înțelegerea fondului noțiunilor — cu scop aplicativ în practica rezolvării de exerciții și probleme — și intenționând ca lucrarea să fie utilă elevilor atât în pregătirea școlară curentă, cât și, mai ales, în pregătirea premergătoare diverselor forme de testare sau examinare.

Autorul

CUPRINS

PARTEA I. Elementele de bază

1. **MULȚIMI** 9

2. **OPERAȚII ALGEBRICE** 13
   - Noțiuni generale. Proprietăți. Structuri algebrice 13
   - Ridicarea la putere; puterea 18
   - Extragerea de rădăcină; radicalul 21
   - Logaritmarea; logaritmul 25
   - Exemple de aplicații 30

3. **NUMERE COMPLEXE** 31
   - Exemple de aplicații 37

4. **EXPRESII ALGEBRICE** 38
   - Noțiuni generale.
   - Egalitate, identitate, inegalitate 38
   - Expresii algebrice particulare 40
     - Monom 40
     - Polinom 41
     - Trinomul de gradul 2 47
   - Exemple de aplicații 51

5. **EGALITĂȚI**. Metode de rezolvare 52

6. **FUNCȚII** 54

7. **PROGRESII. INSERĂRI** 59
   - Progresia aritmetică 59
   - Progresia geometrică 60
   - Exemple de aplicații 62

8. **ANALIZA COMBINATORIE** 63
   - Permutări 63
   - Combinări 64
   - Aranjamente 65
   - Binomul lui Newton 66
   - Exemple de aplicații 67

9. **SUME PARTICULARE**. Metode de calcul 68

10. **MEDII** 71

11. **MATRICE** 72
DETERMINANŢI 75

12. **ECUAŢII**. Metode de rezolvare 78
Noţiuni generale 78
Ecuaţia de gradul 1 79
Ecuaţia de gradul 2 80
Ecuaţia bipătrată 82
Ecuaţia reciprocă 82
Ecuaţia binomă 84
Ecuaţia trinomă 84
Ecuaţia exponenţială 85
Ecuaţia logaritmică 85
Ecuaţii în combinatorică 86
Ecuaţii algebrice de grad n 87
Relaţiile lui Viete 88

13. **SISTEME DE ECUAŢII**. Metode de rezolvare 90
Sisteme de ecuaţii liniare 94

14. **INECUAŢII.**
SISTEME DE INECUAŢII. Metode de rezolvare 97

PARTEA a II-a. Culegere de exerciţii şi probleme aplicative

15. **EXERCIŢII ŞI PROBLEME** cu indicaţii de rezolvare 101

16. **EXERCIŢII ŞI PROBLEME** fără indicaţii de rezolvare 109

SINTEZA INDEXATĂ DE RELAŢII ŞI FORMULE 135

PARTEA I. Elementele de bază

MULŢIMI

În sens matematic, o mulţime, fie ea M, se defineşte ca fiind o grupare sau o colecţie, ale cărei componente se numesc ELEMENTE ale mulţimii, şi care este privită, considerată şi tratată ca un ansamblu unitar prin una dintre următoarele modalităţi:
– specificarea unei caracteristici / proprietăţi comune tuturor elementelor mulţimii definite;
– indicarea / specificarea concretă a elementelor care compun mulţimea definită, fie ele $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$; se scrie $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots m_n\}$

După numărul, finit sau infinit, de elemente, mulţimile pot fi mulţimi finite sau, respectiv, mulţimi infinite.
Mulţimea VIDĂ: o mulţime fără niciun element; se notează cu $\emptyset$.

RELAŢII

– Elementele m_k ale unei mulţimi M sunt legate de aceasta prin relaţia de **APARTENENŢĂ**; se scrie:

$$\mathbf{m_k \in M}$$

(elementul m_k „aparţine” mulţimii M)

O mulţime M' este SUBMULŢIME a unei mulţimi M dacă toate elementele mulţimii M' sunt şi elemente ale mulţimii M, adică avem:

$$m_k' \in M' \text{ implică } m_k' \in M, \text{ pentru orice } m_k'$$

– Submulţimea M' a unei mulţimi M este legată de aceasta prin relaţia de **INCLUZIUNE** (relaţie reflexivă, antisimetrică, tranzitivă, vezi pag. 12); se scrie:

$$\mathbf{M' \subset M}$$

(mulţimea M' este „inclusă” în mulţimea M)

Mulţimea COMPLEMENTARĂ a unei submulţimi M' faţă de o mulţime M în care este inclusă ($M' \subset M$): mulţimea ale cărei elemente aparţin mulţimii M dar nu aparţin şi submulţimii M'.
Se mai numeşte şi DIFERENŢĂ, şi se notează

$$C_M M' = M - M' \text{ (complementara mulţimii M' în M).}$$

Exemplu: $M = \{a, b, c, d\}$; $M' = \{b, d\}$; $C_M M' = M - M' = \{a, c\}$

OPERAȚII

– Operația de **REUNIRE**: operația prin care, din două mulțimi date, M_1 și M_2, se obține ca rezultat o mulțime M, numită REUNIUNE, care are ca elemente toate elementele, comune și necomune, ale mulțimilor date, luate câte o singură dată. Se scrie:

$$M_1 \cup M_2 = M$$

Exemplu:

$\{a, b, c, x, y, z\} \cup \{b, c, d, x, v, w\} = \{a, b, c, d, x, y, z, v, w\}$

OBS.: mulțimea vidă Ø este element neutru pentru operația de reunire,

$M \cup \varnothing = \varnothing \cup M = M$, pentru orice M (vezi pag. 16).

– Operația de **INTERSECTARE**: operația prin care, din două mulțimi date, M_1 și M_2, se obține ca rezultat o mulțime M, numită INTERSECȚIE, care are ca elemente elementele comune ale mulțimilor date, luate câte o singură dată. Se scrie:

$$M_1 \cap M_2 = M$$

Exemplu:

$\{a, b, c, x, y, z\} \cap \{b, c, d, x, v, w\} = \{b, c, x\}$

Mulțimi disjuncte (fie ele M_1 și M_2) – nu au niciun element comun; rezultă că intersecția lor este mulțimea vidă:

$$M_1 \cap M_2 = \varnothing$$

PRODUS CARTEZIAN a două mulțimi date, A și B: o mulțime M ale cărei elemente sunt perechi formate din elemente aparținând, respectiv, mulțimilor date. Se scrie: $A \times B = M$

Dacă $a \in A$ și $b \in B$ rezultă $(a, b) \in M$

De notat: în perechile (a, b), elementele a și b sunt ordonate strict în ordinea indicată de ordinea factorilor din produsul cartezian; inversarea ordinii factorilor conduce la formarea altor perechi, (b, a), diferite de perechile inițiale, deci produsul cartezian rezultat este diferit în consecință, având alte elemente. Prin urmare, produsul cartezian este (în general) necomutativ.

Un exemplu elocvent de produs cartezian este mulțimea M a coordonatelor (x, y) ale punctelor din planul format de axele absciselor, $x \in X$, și ordonatelor, $y \in Y$, cu $M = X \times Y$ și $(x, y) \in M$.

Corespondența / punerea în corespondență a două mulțimi (M_1 și M_2)

– corespondență UNIVOCĂ: fiecărui element din M_1 îi corespunde, prin „atașare", un element din M_2, dar nu și reciproc;
– corespondență BI-UNIVOCĂ: corespondență UNIVOCĂ în ambele sensuri, pentru elementele celor două mulțimi.

MULȚIMI NUMERICE: mulțimi ale căror elemente sunt numere.

– Mulțimea numerelor **NATURALE**, notată **N**: mulțimea, definită extensiv, a numerelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Se notează **N*** mulțimea **N** din care se exclude numărul 0; este mulțimea numerelor naturale nenule

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\} \qquad \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

– Mulțimea numerelor **ÎNTREGI**, notată **Z**: mulțimea numerelor naturale reunită cu mulțimea numerelor algebrice (cu „semn", pozitive sau negative) a căror valoare absolută este mulțimea **N**.

– Mulțimea numerelor **RAȚIONALE**, notată **Q**: mulțimea numerelor care se pot scrie sub forma $\frac{a}{b}$, cu a și b numere întregi ($b \neq 0$).

Altfel, numere iraționale.

– Mulțimea numerelor **REALE**, notată **R**: mulțimea numerelor care nu conțin „unitatea imaginară" / radicali de indice par din numere negative.
Este reuniunea numerelor raționale cu numerele iraționale.
Se reprezintă prin puncte pe axa numerelor reale.

– Mulțimea numerelor **COMPLEXE**, notată **C**: mulțimea numerelor care acceptă radicali de indice par și impar oricare ar fi semnul algebric al expresiei de sub radical / admit „unitatea imaginară" (vezi Cap. 3).
Este reuniunea numerelor reale cu numerele imaginare.
Se reprezintă prin puncte în planul complex.
Avem relațiile de incluziune:

$$\mathbf{N}^* \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

Mulţimile numerelor FRACŢIONARE, IRAŢIONALE, IMAGINARE constituie mulţimile complementare ale, respectiv, mulţimilor numerelor ÎNTREGI, RAŢIONALE, REALE, (ale căror definiţii le contrazic), faţă de mulţimile de nivel imediat superior în relaţiile de incluziune de mai sus; nu au simboluri / notaţii proprii consacrate.

MULŢIME ORDONATĂ: o mulţime nevidă, fie ea M, pe care (între elementele căreia) se defineşte o relaţie binară „ ≤ ”, zisă de ordine dacă, pentru orice a, b, c ∈ M, sunt verificate următoarele condiţii: reflexivitatea (a ≤ a), antisimetria (a ≤ b şi b ≤ a implică a = b) şi tranzitivitatea (a ≤ b şi b ≤ c implică a ≤ c).

Mulţimea **N** a numerelor naturale este o mulţime infinită şi ordonată. (Uzual, se consideră ca fiind mulţime ordonată o mulţime nevidă ale cărei elemente sunt puse în corespondenţă bi-univocă cu mulţimea **N** a numerelor naturale, sau cu o submulţime finită şi ordonată a acesteia).

Relaţie reflexivă, antisimetrică, tranzitivă

În general, într-o mulţime nevidă, fie ea M, o relaţie, notată aici „**rel**”, între elementele sale este:

– reflexivă, dacă a **rel** a, pentru orice a ∈ M
– antisimetrică, dacă a **rel** b şi b **rel** a implică a = b, pentru orice a, b ∈ M
– tranzitivă, dacă a **rel** b şi b **rel** c implică a **rel** c, pentru orice a, b, c ∈ M

Observaţie: a, b, c pot fi considerate mulţimi, cu M reuniunea lor, caz în care proprietăţile de mai sus se menţin ca proprietăţi ale unor relaţii între mulţimi (vezi relaţia de INCLUZIUNE, pag. 9).

NOTĂ

Conceptul de mulţime este un concept de bază şi esenţial pentru definirea fundamentelor matematicii (vezi şi pag. 17).

OPERAŢII ALGEBRICE

În sens matematic, o operaţie – definită ca lege de compoziţie pe o mulţime dată – este procedeul, strict şi complet definit, prin care, pornind de la numere (expresii) date, se generează un număr (expresie), direct şi exclusiv legat de numerele (expresiile) date prin însuşi procedeul care l-a generat.
Se scrie:

A § B = C

unde:

A, B numerele (expresiile) date – OPERANZI
§ simbolul operaţiei, indicând univoc fiecare operaţie concretă (+, -, x, :, etc)
C numărul (expresia) generat prin operaţie – REZULTAT

Operaţia asociază rezultatul la operanzi daţi, după un procedeu determinat, bine şi strict definit.
(Într-o exprimare simplistă, operaţia este „reţeta” prin care se obţine REZULTATUL din OPERANZI).

Operaţiile se diferenţiază în funcţie de ceea ce se urmăreşte prin efectuarea lor, cu consecinţe directe asupra procedeului în sine, a valorii rezultatului şi, evident, a simbolului (particulare fiecărei operaţii).

A defini o operaţie înseamnă de fapt a defini procedeul practic de obţinere a rezultatului său, din operanzi daţi.

Primele operaţii matematice au fost operaţiile aritmetice, apărute ca şi corespondente ale unor operaţii fizice cu obiecte concrete; introducerea numerelor, care caracterizează sub aspect cantitativ obiecte sau grupări de obiecte, a transformat operaţiile cu obiecte fizice în operaţii cu echivalentele cantitative ale acestora, adică în operaţii matematice cu numere, ignorând natura fizică a obiectelor şi deci generalizând, prin abstractizare, operaţiile fizice.

Operaţiile matematice fac mult mai comodă şi substituie efectuarea operaţiilor fizice când este urmărit doar aspectul cantitativ; în plus, ele devin operaţii de sine stătătoare cu numere, deci cu orice poate fi reprezentat sub formă de număr.

Se realizează astfel abstractizarea şi generalizarea, prin ignorarea – în operaţie – a naturii fizice a ceea ce e reprezentabil prin numere sau un echivalent convenit al acestora; se operează cu numere pur şi simplu, ceea ce a permis matematicii să se dezvolte ca teorie abstractă independentă care a creat astfel instrumente utile şi valorificabile în domeniul care a născut-o de fapt, domeniul fizic, practic, concret.

Matematica este o știință care utilizează, în esență, două instrumente fundamentale:

– raționamentul, bazat pe principiile logicii;

– calculul, bazat pe operațiile matematice.

Dacă raționamentul este „împrumutat" din logică (știință cu care matematica este esențial înrudită), calculul este un produs propriu al matematicii, prin însăși definirea și utilizarea operațiilor matematice.

În definirea operațiilor matematice se respectă strict legile logicii, legi care fac de fapt legătura corectă cu realitatea fizică, pe care operațiile trebuie să o respecte și să o reflecte.

Matematica realizează astfel legătura bi-sens dintre realul fizic concret și „realul" abstract (având, ca fundamentare și elemente de legătură, principiile logicii): se „inspiră" din concret, „creează" în abstract și valorifică în același concret fizic de la care a pornit (vezi aplicațiile matematicii în fizică).

Matematica nu este abstractă! Abstractul este doar forma și mediul în care matematica produce și evoluează, dar, dintotdeauna, matematica a plecat de la și s-a întors – prin ceea ce a produs – la concretul fizic, fiind astfel un exponent al gândirii și imaginației intelectuale precum și, poate, cel mai productiv instrument în evoluția, dirijată de om, a lumii fizice.

Definirea operațiilor, ca instrumente de calcul, este un proces creativ; calculul, care înseamnă efectuarea operațiilor, este un proces „mecanic", de uzură, și este practic preluat de mijloace de calcul mecanice sau electronice, auxiliare (dar produse ale) inteligenței umane.

Operația este definită ca lege de compoziție pe o mulțime dată.

Considerând o mulțime nevidă M și două elemente oarecare ale acesteia, $m_1 \in M$ și $m_2 \in M$, o operație § pe M asociază fiecărei perechi (m_1, m_2) un element $r = m_1 \S m_2$; $r \in M$ și este rezultatul operației § asupra operanzilor m_1 și m_2.

Mulțimea perechilor (m_1, m_2) este însă produsul cartezian $M \times M$ (vezi pag. 10).

Rezultă atunci că o operație algebrică § pe mulțimea M este o funcție definită pe produsul cartezian $M \times M$, și cu valori în M (vezi și Cap. 6):

$$\S : M \times M \to M$$

Această funcție asociază fiecărei perechi $(m_1, m_2) \in M \times M$ elementul unic $(m_1 \S m_2) \in M$.

PROPRIETĂȚI GENERALE ALE OPERAȚIILOR

Se spune despre o operație § (pe M) că este:

– **ASOCIATIVĂ**, dacă o parte din operanzi pot fi „asociați" în operare și înlocuiți prin rezultatul aceleași operații efectuate asupra operanzilor respectivi, adică, pentru orice $a, b, c \in M$:

$$(a \S b) \S c = a \S (b \S c) = a \S d, \text{ cu } d = b \S c$$

– **COMUTATIVĂ**, dacă rezultatul operației nu se schimbă schimbând ordinea operanzilor în operație („comutându-le" poziția), adică, pentru orice $a, b \in M$:

$$a \S b = b \S a$$

Se spune despre o operație $\S_1$ (pe M) că este

– **DISTRIBUTIVĂ** față de o operație $\S_2$ (pe M) dacă, pentru orice $a, b, c \in M$:

$$a \S_1 (b \S_2 c) = (a \S_1 b) \S_2 (a \S_1 c) \quad \text{(distributivă „la stânga")}$$

și

$$(b \S_2 c) \S_1 a = (b \S_1 a) \S_2 (c \S_1 a) \quad \text{(distributivă „la dreapta")}$$

(Operația $\S_1$ se „distribuie" asupra operanzilor operației $\S_2$)

Exemplu:

operația de înmulțire este distributivă față de operația de adunare, adică avem

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

și

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

Fiecare operație are reguli de efectuare și simbol proprii; de asemenea, are proprietăți, specifice sau comune unui grup de operații, și restricții de efectuare / valabilitate, restricțiile decurgând în principal din condițiile de existență impuse rezultatului și / sau operanzilor (adică din condițiile care, într-un context dat, fac posibilă efectuarea operației).

ELEMENT NEUTRU (**e**) al unei operaţii § pe o mulţime M:

dacă există, este un element **e** ∈ M, unic, astfel încât, pentru orice m ∈ M, să avem

$$m \S \mathbf{e} = \mathbf{e} \S m = m$$

ELEMENT SIMETRIZABIL. SIMETRICUL UNUI ELEMENT

Considerând o operaţie §, pe o mulţime M şi cu elementul neutru **e**, un element m ∈ M este simetrizabil faţă de operaţia § dacă există un element m_s ∈ M, numit „simetricul" lui m faţă de operaţia §, astfel încât

$$m \S m_s = m_s \S m = \mathbf{e}$$

De notat: dacă există **e**, atunci $\mathbf{e}_s = \mathbf{e}$

Exemple:

Operaţia algebrică de

– ÎNSUMARE

$\mathbf{e} = \mathbf{0}$ $\qquad X + \mathbf{0} = \mathbf{0} + X = X$

$X_s = -X$ $\qquad X + (-X) = (-X) + X = \mathbf{0}$

$(-X)$ este „opusul" lui X

– ÎNMULŢIRE
(RIDICARE LA PUTERE)

$\mathbf{e} = \mathbf{1}$ $\qquad Y \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times Y = Y$

$Y^0 = \mathbf{e} = 1$

$Y_s = \dfrac{1}{Y} = Y^{-1}$ $\qquad Y \times \dfrac{1}{Y} = \dfrac{1}{Y} \times Y = \mathbf{1}$

$\dfrac{1}{Y} = Y^{-1}$ este „inversul" lui Y $\qquad (Y^1 \times Y^{-1} = Y^0 = \mathbf{1})$

– REUNIRE

$\mathbf{e} = \varnothing$ $\qquad M \cup \varnothing = \varnothing \cup M = M$

(cu restricţiile de existenţă X_s, Y_s în mulţimile asociate operaţiilor;
vezi şi pag. 17, grup / monoid).

Asocierea dintre conceptul de operaţie algebrică şi conceptul de mulţime constituie baza de definire, axiomatică, a STRUCTURILOR ALGEBRICE, fundamentale în matematică (şi magnifice prin „complexitatea" şi universalitatea simplităţii lor – Niels Henrik ABEL, 1802-1829 şi Evariste GALOIS, 1811-1832).
Structura algebrică (în speţă, teoria grupurilor) constituie conceptul care a permis tranziţia de la algebra tradiţională, care se ocupa doar de numere, spre o generalizare care implică şi permite operaţii între elemente de orice fel. (O reconfirmare a „realismului", înalt abstractizat, al matematicii! Vezi pag. 14 şi Bibliografia [2]).

Tratarea exhaustivă a acestui subiect nu intră în obiectivul lucrării de faţă. Vom reaminti însă definiţiile:

STRUCTURĂ ALGEBRICĂ – un cuplu format dintr-o mulţime nevidă, fie ea M, şi (cel puţin) o operaţie algebrică, fie ea §, pe această mulţime, operaţie care satisface una sau mai multe axiome.
Se scrie: (M, §)

– SEMIGRUP: o structură algebrică (M, §) în care operaţia § satisface axioma, unică: 1) este asociativă (vezi pag. 15).

Dacă, suplimentar, operaţia § este şi comutativă, semigrupul se numeşte semigrup comutativ.

– MONOID: o structură algebrică (M, §) în care operaţia § satisface două axiome: 1) este asociativă; 2) are element neutru (vezi pag. 16).

Dacă, suplimentar, operaţia § este şi comutativă, monoidul se numeşte monoid comutativ.

Exemple: (**N**, +); (**N***, x); (**Z**, x); (**Q**, x)

– GRUP: o structură algebrică (M, §) în care operaţia § satisface trei axiome: 1) este asociativă; 2) are element neutru; 3) orice element m ∈ M este simetrizabil faţă de operaţia § (vezi pag. 16).

Dacă, suplimentar, operaţia § este şi comutativă, grupul se numeşte grup comutativ (sau grup abelian).

Exemple: (**Z**, +); (**Q**, +)